1/6/2017.

Παραδειγμα: Εστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ απο $f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $x > 0$.
Να κατασκευαστεί ΟΙ-τεστ ελεγχο $H_0: \lambda = \lambda_0$ (λ_0 γνωστο) εναντι της $H_a: \lambda > \lambda_0$.

Λύση

Θεωρώ τον ελεγχο $H_0: \lambda = \lambda_0$ v $H_a^*: \lambda = \lambda_a$ (λ_a γνωστο) όπου $\lambda_a > \lambda_0$.

Το Ι-τεστ έχει κ.π.: $\frac{L_0}{L_a} \leq k_a$,

L_0, L_a οι πιθανότητες υπο H_0 και H_a^* αντιστοιχα.

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \Sigma x_i}$$

Η Ι-κπ γίνεται: $\frac{L_0}{L_a} \leq k \Rightarrow \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \Sigma x_i}}{\lambda_a^n e^{-\lambda_a \Sigma x_i}} \leq k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_a}\right)^n e^{-(\lambda_0 - \lambda_a)\Sigma x_i} \leq k \Rightarrow e^{-(\lambda_0 - \lambda_a)\Sigma x_i} \leq \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_0}\right)^n k \overset{(\lambda_a > \lambda_0)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (\lambda_a - \lambda_0)\Sigma x_i \leq \ln\left(\frac{\lambda_a}{\lambda_0}\right)^n k \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{\lambda_a - \lambda_0} \ln\left(\frac{\lambda_a}{\lambda_0}\right)^n k = k'$$

Άρα η Ι-κπ για ελεγχο H_0 εναντι της H_a^* είναι:

$$\boxed{\Sigma x_i \leq k'}$$

Υπολογισμος κ.σ. k': (Για να βρω το k' παίρνω πάντα σφαλμα τυπου Ι)

$\alpha = P$(απορ. H_0 | H_0 αληθης) = (1)
$P(\Sigma x_i \leq k' \mid x_i \sim \text{Εκθ}(\lambda_0)\ \forall i)$

|| Αφου $x_i \sim \text{Εκθ}(\lambda_0)$ και $\text{Εκθ}(\lambda_0) \equiv G\left(1, \frac{1}{\lambda_0}\right)$ || $\Rightarrow x_i \sim G\left(1, \frac{1}{\lambda_0}\right)\ \forall i = 1, \dots, n$

$$\xrightarrow[\text{ροπογεννητρ.}]{\text{μεθοδος}} \sum_{i=1}^{n} x_i \sim G\left(n, \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

Η σ.π.π. του $\sum_{i=1}^{n} x_i$ είναι: $\frac{1}{(1/\lambda_0)^n \Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x/(1/\lambda_0)} = \frac{\lambda_0^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda_0 x}$ (2)

απο ①,②: $\alpha = P(G(n, 1/\lambda_0) \leq k') = \int_0^{k'} \frac{\lambda_0^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda_0 x} dx.$ ③

Το κ' υπολογίζεται από την <u>αριθμητική</u> επίλυση της εξίσωσης αυτής

<u>Συγκεντρωτικά</u>: Για τον έλεγχο Ho εναντι H_a^* η ΣΣΤ είναι Σx_i με κατανομή $G\left(n, \frac{1}{\lambda_0}\right)$ υπο Ho και κ.π. μεγέθους α την $\Sigma(x_i) \leq k'$ με κ' να υπολογίζεται από τη σχέση ③.

Επειδή το test ~~αφ~~ αυτό δεν εξαρτάται από το λα είναι και το ΟΙ για τον αρχικό έλεγχο.

Για να βρω κλειστό διάστημα (επειδή το πιο πάνω δεν βολεύει) εργάζομαι ως εξής:

Θεωρώ το $T = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i$. Επειδή $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim G(n, 1/\lambda_0)$ με αλλαγή μεταβλητών η σ.π.π. του Τ είναι:

$f_T(t) = \frac{1}{2^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t/2}, \ t>0.$

Άρα $T = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i \sim G(n, 2) = \chi^2_{2n}$

$\alpha = P(\Sigma x_i \leq k' \mid x_i \sim Εκθ(\lambda_0) \ \forall i) =$

$= P(2\lambda_0 \Sigma x_i \leq 2\lambda_0 k' \mid 2\lambda_0 \Sigma x_i \sim \chi^2_{2n}) =$

$= P(\chi^2_{2n} \leq k^*) \Rightarrow P(\chi^2_{2n} \geq k^*) = 1 - \alpha$

$\Rightarrow k^* = \chi_{2n, 1-\alpha}.$

<u>Συγκεντρωτικά</u>: Το Ι τεστ για έλεγχο της Ho εναντι H_a^* έχει ΣΣΤ την $2\lambda_0 \Sigma x_i$ με κατανομή χ^2_{2n} υπο Ho και κ.π. μεγέθους α $2\lambda_0 \Sigma x_i \leq \chi^2_{2n, 1-\alpha}$

Επειδή το test αυτό δεν εξαρτάται από το λα είναι ΟΙ-τεστ για τον αρχικό έλεγχο της Ho εναντι Ha.

ΟΧΙ για εξεταστική

Τεστ Πηλίκου Μέγιστων Πιθανοφανειών: (ΤΠΜΠ)

Μεθοδος Neyman-Pearson → Ho: απλή Ha: απλή ← I-test
ή
Ho: απλή Ha: σύνθετη ← ΟΙ-τεστ

↳ Περιορισμένης ευελιξίας:

Πχ Εστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ άγνωστα.

Έστω $\underbrace{H_0: \mu = \mu_0 \text{ (γνωστο)}}_{\text{δεν είναι απλή γιατί το } \sigma^2 \text{ άγνωστο.}}$ $H_a: \mu > \mu_0$.

Άρα, δεν εφαρμόζεται Neyman-Pearson.

Φορμαλισμος

Εστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ απο $f(x, \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n$.

Εστω προς ελεγχο $H_0: \vartheta \in \Theta_0$ έναντι $H_a: \vartheta \in \Theta_a$ όπου $\Theta_0, \Theta_a \subseteq \Theta$

Για το προηγούμ. παράδειγμα

$\Theta = \{(\mu, \sigma^2): \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$

$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2): \mu = \mu_0, \sigma^2 > 0\}$

$\Theta_a = \{(\mu, \sigma^2): \mu > \mu_0, \sigma^2 > 0\}$

Πώς κατασκευάζω ΤΠΜΠ):

① $\lambda = \dfrac{\sup_{\vartheta \in \Theta_0} L(\vartheta)}{\sup_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta)} \xrightarrow[\text{ΕΜΠ}]{\text{ορισμό}} \dfrac{L(\hat{\vartheta}_0)}{L(\hat{\vartheta})}$

② Κρίσιμη περιοχή:

↳ μορφή κ.π. → μικρές τιμές του λόγου λ, δηλ. $\lambda \leq k$.

Παραδειγμα: Εστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ απο πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ με μ, σ^2 αγνωστα
Να κατασκευαστει test πηλικου μεγ. πιθανοφανειων για ελεγχο.
$H_0: \mu = \mu_0$, μ_0 γνωστο, $H_a: \mu \neq \mu_0$.

Λύση

$$\lambda = \frac{\sup_{\mu=\mu_0, \sigma^2} L(\mu, \sigma^2)}{\sup_{\mu, \sigma^2} L(\mu, \sigma^2)} = \frac{L(\mu_0, \hat{\sigma}_0^2)}{L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)}$$

οπου $\hat{\sigma}_0^2$ ΕΜΠ της σ^2 οταν $\mu = \mu_0$, $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ οι ΕΜΠ των μ & σ^2 στον πληρη παραμετρικό χώρο.

Οι ΕΜΠ των μ & σ^2 στον πληρη παραμ. χώρο ειναι οι εξης: (τους εχουμε βρει)

$$\hat{\mu} = \bar{x} \quad \& \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})^2$$

Ενώ ο $\hat{\sigma}_0^2$ (τον εχουμε βρει) είναι:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - \mu_0)^2.$$

Η L ειναι: $L(\mu, \sigma^2) = \Pi f_{X_i}(x_i, \mu, \sigma^2) = \Pi \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2} =$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma (x_i - \mu)^2}.$$

Τοτε θα εχουμε:

$$\lambda = \frac{L(\mu_0, \hat{\sigma}_0)}{L(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\Sigma (x_i - \mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\Sigma (x_i - \bar{x})^2}} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} \frac{e^{-n/2}}{e^{-n/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2}\right)^{n/2}$$

Κ.Π. : $\lambda \leq k \Rightarrow \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma (x_i - \mu_0)^2} \leq k^{2/n}$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \overset{\pm \bar{x}}{-} \mu_0)^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 + n \Sigma (\bar{x} - \mu_0)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 + n \Sigma (\bar{x} - \mu_0)^2} < k^{2/n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{n \Sigma (\bar{x} - \mu_0)^2}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}} \leq k^{2/n} \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{n \Sigma (\bar{x} - \mu_0)^2}{(n-1) S^2}} \leq k^{2/n}$$ και αν $t^2 = \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)^2$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{1+\frac{\Sigma(x_i-\mu_0)^2}{(n-1)S^2/n}} \leq k^2/n} \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}t^2} \leq k^2/n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 \geq (n-1)\left(\frac{1}{k^2/n} - 1\right) \rightarrow t^2 \geq k^*$$

Για τον ελεγχο $H_0: \mu=\mu_0$ εναντι $H_0: \mu \neq \mu_0$ η σστ ειναι $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ με κατανομη t_{n-1} υπο H_0 και κπ μεγεθους α: $t^2 \geq k^*$ ή $|t| \geq (k^*)^{1/2} = k'$

$$\alpha = P(\text{Απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθης}) = P(|t| \geq k' \mid t \sim t_{n-1}) =$$

$$= P(t \geq k' \text{ ή } t \leq -k' \mid t \sim t_{n-1}) =$$

$$= 2P(t \geq k' \mid t \sim t_{n-1}) \Rightarrow$$

$$P(t_{n-1} \geq k') = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{k' = t_{n-1, \alpha/2}}$$